Rozwiązanie równań el-magn.-go pola (Maxwella) w próżni

Równania zasadnicze:

$$c \cdot \operatorname{curl} \bar{H} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad \ldots\ldots \text{I}$$

$$c \cdot \operatorname{curl} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad \ldots\ldots \text{II}$$

$$\operatorname{div} \bar{E} = 0 \quad \ldots\ldots \text{III}$$

$$\operatorname{div} \bar{H} = 0 \quad \ldots\ldots \text{IV}$$

Wektor $\bar{M}$ zespolony: określamy

$$\bar{M} = \bar{H} + i \cdot \bar{E} \quad \ldots\ldots (M)$$

Mamy: $\operatorname{div} \bar{M} = \operatorname{div} \bar{H} + i \cdot \operatorname{div} \bar{E}$ więc z (III) i (IV)

$$\operatorname{div} \bar{M} = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

następnie $\operatorname{curl} \bar{M} = \operatorname{curl} \bar{H} + i \cdot \operatorname{curl} \bar{E}$ więc z (I) i (II)

$$c \cdot \operatorname{curl} \bar{M} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - i \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$

$$c \cdot \operatorname{curl} \bar{M} = -i \left\{ \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + i \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right\}$$

$$c \cdot \operatorname{curl} \bar{M} = -i \cdot \frac{\partial \bar{M}}{\partial t} \quad \ldots\ldots (2)$$

Wektor $\bar{M}_*$ sprzężony: określamy

$$\bar{M}_* = \bar{H} - i \bar{E} \quad \ldots\ldots (M_*)$$

Otrzymujemy, jak wyżej: $\operatorname{div} \bar{M}_* = 0 \quad \ldots\ldots (3)$

$$c \cdot \operatorname{curl} \bar{M}_* = +i \cdot \frac{\partial \bar{M}_*}{\partial t} \quad \ldots\ldots (4)$$

<u>Inwarjanty</u>: zakładamy określenia:

$$J_1 = \bar{H}^2 - \bar{E}^2 \qquad \text{----}(J_1)$$

$$J_2 = {}_s(\bar{E}\bar{H}) \qquad \text{----}(J_2)$$

<u>Kwadraty: $\bar{M}^2$ oraz $\bar{M}_*^2$</u>. Z określeń (M) i (M_*) p. 1

$$\bar{M}^2 = {}_s(\bar{H} + i\bar{E})^2 = \bar{H}^2 - \bar{E}^2 + 2i\,{}_s(\bar{E}\bar{H})$$

$$\bar{M}_*^2 = {}_s(\bar{H} - i\bar{E})^2 = \bar{H}^2 - \bar{E}^2 - 2i\,{}_s(\bar{E}\bar{H})$$

więc

$$\bar{M}^2 = J_1 + 2iJ_2 \qquad \text{---}(5)$$

$$\bar{M}_*^2 = J_1 - 2iJ_2 \qquad \text{---}(6)$$

{ <u>Sprawdzenie</u>:

$$\bar{M}^2 = (H_x + iE_x)^2 + (H_y + iE_y)^2 + (H_z + iE_z)^2$$

$$= H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)$$

$$+ 2i(E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z)$$

powracamy do (5)
i podobnie (6) }

<u>Iloczyn skalarny ${}_s(\bar{M}\bar{M}_*)$</u>

$${}_s(\bar{M}\bar{M}_*) = {}_s(\bar{H} + i\bar{E})(\bar{H} - i\bar{E})$$

$$= {}_s(\bar{H}^2) + {}_s(\bar{E}^2) = 8\pi\rho \quad \text{gdzie } \rho \text{ gęstość elmagn. energii} \qquad \}(7)$$

<u>Iloczyn wektoryalny ${}_v(\bar{M}\bar{M}_*)$</u>

$${}_v(\bar{M}\bar{M}_*) = {}_v(\bar{H} + i\bar{E})(\bar{H} - i\bar{E})$$

ponieważ ${}_v(\bar{H}^2) = 0$, ${}_v(\bar{E}^2) = 0$, zatem

$${}_v(\bar{M}\bar{M}_*) = 2i\,{}_v(\bar{E}\bar{H})$$

(8) proporcyonalny do wektora R. Poyntinga.

Wniosek. Z równań (5) i (6) p. 2

$$\overline{M}^2 = J_1 + 2i J_2 \quad --- (5).$$

$$\overline{M}_*^2 = J_1 - 2i J_2 \quad --- (6)$$

wyprowadzamy:

$$\overline{M}^2 \cdot \overline{M}_*^2 = J_1^2 + 4 J_2^2 \quad ------ (9)$$

Uzupełnienie twierdzenia Poyntinga. Pisząc

$$\overline{\mathcal{E}}^2 + \overline{H}^2 = s(\overline{M}\overline{M}_*) \quad \text{por. } (7)$$

$$= 8\pi\rho \quad (\text{określenie } \rho) \quad --- (10)$$

oraz Poyntinga

$$\overline{R} = \frac{c}{4\pi} v(\overline{\mathcal{E}}\overline{H}) = -\frac{ic}{8\pi} v(\overline{M}\overline{M}_*) \quad \text{por } (8)$$

$$= \rho \overline{V} \quad --- (\text{określenie } \overline{V}) \quad ---- (11)$$

przekonywamy się, że

$$\rho^2 (c^2 - V^2) = \frac{c^2}{64\pi^2} \left\{ \left(s(\overline{M}\overline{M}_*)\right)^2 + \left(v(\overline{M}\overline{M}_*)\right)^2 \right\}$$

$$= \frac{c^2}{64\pi^2} \overline{M}^2 \cdot \overline{M}_*^2$$

$$= \frac{c^2}{64\pi^2} \left\{ J_1^2 + 4 J_2^2 \right\} \quad --- (12)$$

zatem ≥ 0 gdyż J_1, J_2 są rzeczywiste

zatem $V \leq c$. Z określenia (11) i hydrodynam. analogii - sens $\overline{V}$.

$$\left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \overline{V} = 0 \right]$$

Fala elektromagnetyczna „czysta". Jeżeli $\overline{H}^2 = \overline{\mathcal{E}}^2$ oraz $s(\overline{\mathcal{E}}\overline{H}) = 0$

powiadamy, że fala el-m- jest "czysta"; przykład mieliśmy dawniej

Jeżeli zatem fala jest "czysta", mamy : (por. p. 2)

$$J_1 = 0 \qquad J_2 = 0$$

zatem, według (12) : $V = c$

W fali czystej : $\overline{M}^2 = 0$

$\overline{M}_*^2 = 0$ por. (5) i (6) p. 2

<u>Zadanie I.</u> Dowieść, że, w przypadku fali czystej, mamy

$$s(\overline{M} \cdot \text{curl}\, \overline{M}) = 0 \qquad \text{--- (13)}$$

a także

$$s\left(\overline{M} \cdot \frac{\partial \overline{M}}{\partial t}\right) = 0 \,. \qquad \text{---- (14)}$$

<u>Zadanie II.</u> Przypuśćmy, że istnieją A, B takie, iż

$$\overline{M} = v(\nabla A \cdot \nabla B) \qquad \text{--- (15)}$$

oraz

$$c\overline{M} = \underline{i} \left\{ \frac{\partial B}{\partial t} \nabla A - \frac{\partial A}{\partial t} \nabla B \right\} \qquad \text{--- (16)}$$

Czy takie założenia mogą uczynić zadość związkom

$$\text{div}\, \overline{M} = 0 \qquad \text{--- (1) p. 1}$$

$$c \cdot \text{curl}\, \overline{M} = -\underline{i} \frac{\partial \overline{M}}{\partial t} \qquad \text{--- (2) p. 1} \quad ?$$

<u>Związek (1).</u> Mamy tożsamość, dla dowolnych wektorów $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$

$$\text{div}\, v(\overline{\alpha}\overline{\beta}) = s(\overline{\beta} \cdot \text{curl}\, \overline{\alpha}) - s(\overline{\alpha} \cdot \text{curl}\, \overline{\beta})$$

Jeżeli $\overline{\alpha} = \nabla A$, $\overline{\beta} = \nabla B$, tedy $\text{curl}\, \overline{\alpha} = 0$, $\text{curl}\, \overline{\beta} = 0$

mamy zatem zawsze : $\text{div}\, v(\nabla A \cdot \nabla B) \equiv 0$

zatem z (15) : $\text{div}\, \overline{M} \equiv 0$

Związek (2). Przypuśćmy : $\overline{\Pi} = Q(xyz).\overline{P}$ gdzie Q skalar
$\overline{\Pi}, \overline{P}$ wektory

Mamy wówczas : $\text{curl}\,\overline{\Pi} = Q\,\text{curl}\,\overline{P} + v(\overline{\nabla Q}.\overline{P})$ .... (*)

Według (16) mamy zatem

$$c.\,\text{curl}\,\overline{M} = \underline{i}v\left\{\nabla\overline{\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)}.\overline{\nabla A}\right\} - \underline{i}v\left\{\nabla\overline{\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)}.\overline{\nabla B}\right\} \quad ..(17)$$

ponieważ $\text{curl}(\overline{\nabla A}) = 0$

$\text{curl}(\overline{\nabla B}) = 0$

Pisząc $\frac{\partial}{\partial t}(v(\overline{\alpha}\overline{\beta})) = v\left(\overline{\alpha}\frac{\overline{\partial\beta}}{\partial t}\right) - v\left(\overline{\beta}\frac{\overline{\partial\alpha}}{\partial t}\right)$

i kładąc $\overline{\alpha} = \overline{\nabla A}$; $\overline{\beta} = \overline{\nabla B}$ otrzymujemy (por. f(15) p. 4)

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\,v(\overline{\nabla A}.\overline{\nabla B})$$

$$= v\left\{\overline{\nabla A}.\nabla\overline{\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)}\right\} - v\left\{\overline{\nabla B}.\nabla\overline{\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)}\right\} \quad ...(18)$$

Z (17), (18) wypada

$$c.\,\text{curl}\,\overline{M} = -\,\underline{i}\left(\frac{\overline{\partial M}}{\partial t}\right) \quad \text{co jest (2). p. 1.}$$

Zadanie III. Fala dana przez (15), (16) jest "czysta".

Skoro $\overline{M} = v(\overline{\nabla A}.\overline{\nabla B})$ ... (15)

przeto $s(\overline{M}.\overline{\nabla A}) = 0$ $\quad s(\overline{M}.\overline{\nabla B}) = 0$ ... (19)

Lecz $\overline{M^2} = \frac{i}{c}\left\{\frac{\partial B}{\partial t}\,s(\overline{M}.\overline{\nabla A}) - \frac{\partial A}{\partial t}\,s(\overline{M}.\overline{\nabla B})\right\}$

$= 0$

a zatem $J_1 = 0$

$J_2 = 0$

fala zatem (15)(16) jest czysta.

6

<u>D'Alembertjan</u>. Nazywamy d'Alembertjanem, za Lorentzem operator

(d'Al.) $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\right)$ który (za przykładem Cauchy'ego) krótko oznaczamy przez $\square^2$.

Mamy zatem dla skalarnej $u = u(x, y, z, t)$ równanie faliste (RF) w czystej próżni

(RF) .... $\square^2 u = 0$

Jeżeli $\bar{A}$ jest wektor, przez $\square^2 \bar{A}$ rozumiemy wektor, którego składowe są

(20) ..... $\square^2 A_x$, $\square^2 A_y$ i $\square^2 A_z$ Środa Dn. 14/VI.

<u>Dwa założenia zasadnicze</u>. Rozumiejąc znowu przez $\bar{M}$, jak poprzednio, wektor

(21) ...... $\bar{M} = \bar{H} + i\bar{E}$

zakładamy, że wektor $\bar{L}$ i skalarna $P(x,y,z,t)$ (gdzie $\bar{L}$ również, przez swoje składowe L_x, L_y, L_z zależy od x, y, z, t) mają czynić związkom

I. $\bar{M} = i \cdot \text{curl}\, \bar{L}$

II. $c\bar{M} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial t} + c \cdot \nabla P$

III. $\square^2 \bar{L} = 0$

IV. $\square^2 P = 0$

V. $c \cdot \text{div}\, \bar{L} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0$

Sprawdźmy, czy $\bar{M}$ określony przy pomocy (I) i (II), uczyni zadosyć równaniom Maxwella, równaniom (1) i (2) p. 1.-

(a) Podług równania (I), mamy

$$\operatorname{div} \bar{M} = i \,.\, \operatorname{div}(\operatorname{curl} \bar{L})$$

$$= 0 \quad \text{.........} (1)$$

zatem (1) p. 1. identycznie sprawdzone.

(b) Podług równania znowu (I), mamy

$$\operatorname{curl} \bar{M} = i \,.\, \operatorname{curl}^2 \bar{L} \quad \text{.......} (22)$$

gdzie $\operatorname{curl}^2 \equiv \operatorname{curl}(\operatorname{curl})$

$= \nabla \operatorname{div} - \nabla^2$ ....(23); lecz w tej tożsamości, która stosuje się przecież tylko do wektorów, trzeba rozumieć przez $\nabla^2 \bar{A}$ taki wektor, którego składowe wynoszą $\nabla^2 A_x$, $\nabla^2 A_y$, $\nabla^2 A_z$.

Mamy zatem

$$\operatorname{curl} \bar{M} = i \left\{ \nabla \operatorname{div} \bar{L} - \nabla^2 \bar{L} \right\} \quad \text{....} (24)$$

Jednakże, z założenia (V):

$$c \,.\, \operatorname{div} \bar{L} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad \text{...} (V)$$

otrzymujemy:
$$c \,.\, \nabla \operatorname{div} \bar{L} + \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\nabla P}) = 0 \quad \text{...} (25)$$

Mamy również, z założenia (III), że

$$\frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \bar{L} = 0 \quad \text{....} (26)$$

Wstawiając zatem, do (24), najprzód (25), potem (26):

$$\operatorname{curl} \bar{M} = i \left\{ -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\nabla P}) - \nabla^2 \bar{L} \right\}$$

$$= i \left\{ -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\nabla P}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial t^2} \right\}$$

$$= -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \overline{\nabla P} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{L}}{\partial t} \right\} \quad \text{....} (27)$$

$$c.\,\mathrm{curl}\,\overline{M} = -i\,\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{L}}{\partial t} + \overline{\nabla P}\right\} \quad \text{---(27) powtórnie}$$

Wobec równania II. p. 6. możemy przepisać (27):

$$c.\,\mathrm{curl}\,\overline{M} = -i\,\frac{\partial \overline{M}}{\partial t} \quad \text{----(2)}$$

co jest właśnie równaniem (2) Maxwella (p. 1), które mieliśmy otrzymać

<u>Uwaga dodatkowa.</u> W powyższym wywodzie, pp. 6-7-8, posługiwaliśmy się równaniami: (I), (V), (III) oraz (II); ale nie posługiwaliśmy się ani razu równaniem (IV): $\nabla^2 P = 0$.

Przekonamy się, istotnie, że to równanie (IV) nie jest niezależnem założeniem; że może być wyprowadzone z pozostałych.

Uważajmy (V): $c\,\mathrm{div}\,\overline{L} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0$ ......(V)

Działając za pomocą $\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}$:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\overline{L}) + \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad \text{-----(28)}$$

Mamy dalej (II): $\overline{M} = \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\overline{L}}{\partial t} + \overline{\nabla P}$ -----(II)

Działając za pomocą div:

$$\mathrm{div}\,\overline{M} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\overline{L}) + \mathrm{div}(\overline{\nabla P})$$

lub $\mathrm{div}\,\overline{M} = \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\overline{L}) + \nabla^2 P$ ---(29)

Lecz, podług (1) (por. p. 7. u góry): $\mathrm{div}\,\overline{M} = 0$ ....(1)

Zatem (29) daje:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\overline{L}) + \nabla^2 P = 0 \quad \text{....(30)}$$

Porównawszy (28) i (30) ze sobą, znajdujemy

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \nabla^2 P$$

czyli właśnie: $\square^2 P = 0$ ... co jest (IV). p. 6.

Istotnie zatem (IV) nie jest niezależnem założeniem; niezależne od siebie

są właściwie tylko (III) i (V), z których wyznaczamy $\bar{\mathfrak{L}}$ i φ.

Nazywamy $\bar{\mathfrak{L}}$ wektoryalnym potencyałem } pola el-m-go ($\bar{\mathfrak{H}}, \bar{\mathfrak{E}}$)
φ skalarnym potencyałem

Przy pomocy tych dwóch: $\bar{\mathfrak{L}}$, φ obliczamy $\bar{\mathfrak{M}}$: według (I), (II)

Nowe założenia; nowy wektor $\bar{\Pi}$.

Jeszcze raz: równania (III), (IV), (V): powtarzamy:

$$\Box^2 \bar{\mathfrak{L}} = 0 \quad \text{.....(III)}$$

$$\Box^2 \varphi = 0 \quad \text{.....(IV)}$$

$$c . \operatorname{div} \bar{\mathfrak{L}} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{.....(V)}.$$

Czy można spełnić te równania za pomocą pewnego wektora

$$\bar{\Pi}(x, y, z, t)$$

Założmy:

$$\bar{\mathfrak{L}} = -\frac{i}{c}\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} + \operatorname{curl} \bar{\Pi} \quad \text{....(VI)} \quad \bar{\mathfrak{L}} \text{ wektor}$$

$$\varphi = + i . \operatorname{div} \bar{\Pi} \quad \text{.......(VII)} \quad \varphi \text{ skalar.}$$

gdzie $\bar{\Pi}$ ma spełniać równanie typu (RF):

$$\Box^2 \bar{\Pi} = 0 \quad \text{.....(VIII)}$$

Nazwijmy $\bar{\Pi}$ "el-magnetycznym wektorem falistym"; gra on rolę zasadniczą w teoryi fal el-magnetycznych.

Sprawdzenie możliwości założeń (VI), (VII), (VIII).

(a) Z równania (VI) mamy, skoro div curl ( ) ≡ 0

$$\operatorname{div} \bar{\mathfrak{L}} = -\frac{i}{c} \operatorname{div}\left(\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t}\right) \quad \text{.....(31)}.$$

Postarzamy

$$\operatorname{div} \bar{\mathfrak{L}} = -\frac{i}{c} \operatorname{div}\left(\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t}\right) \quad \text{-----} (31)$$

lub

$$\operatorname{div} \bar{\mathfrak{L}} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(i \cdot \operatorname{div} \bar{\Pi}\right) = 0 \quad \text{----} (32)$$

Porównawszy (32) z (VII), mamy natychmiast

$$\operatorname{div} \bar{\mathfrak{L}} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{----} (V)$$

co jest równaniem (V) (pp. 6 i 9).

(b) Z równania (VII) p. 9., mianowicie

$$\rho = i \cdot \operatorname{div} \bar{\Pi} \quad \text{-----} (VII)$$

otrzymujemy, działając d'Alembertyanem $\Box^2$:

$$\Box^2 \rho = i \cdot \Box^2 (\operatorname{div} \bar{\Pi})$$
$$= i \cdot \operatorname{div}(\Box^2 \bar{\Pi}) \quad \text{----} (33)$$

co, wobec (VIII), daje: $\Box^2 \rho = 0$ ------ (IV)

co jest równaniem (IV) (pp. 6. i 9).

(c) Z równania (VI), mianowicie

$$\bar{\mathfrak{L}} = -\frac{i}{c} \cdot \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} + \operatorname{curl} \bar{\Pi} \quad \text{----} (VI)$$

otrzymujemy, działając d'Alembertyanem $\Box^2$:

$$\Box^2 \bar{\mathfrak{L}} = -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Box^2 \bar{\Pi}) + \operatorname{curl}(\Box^2 \bar{\Pi}) \quad \text{---} (34)$$

lecz, wobec (VIII), (34) daje natychmiast

$$\Box^2 \bar{\mathfrak{L}} = 0 \qquad \ldots\ldots (III)$$

co jest równaniem (III) (pp. 6 i 9).

Otrzymaliśmy więc (V), (IV) i (III) (pp. 6 i 9), wychodząc z nowych naszych założeń: (VI), (VII), (VIII).

Wyrazić $\bar{\mathcal{H}}$ i $\bar{\mathcal{E}}$ przez wektor $\bar{\Pi}$. Wyrażaliśmy poprzednio, za pomocą równań (I) i (II), p. 6., wektor $\bar{\mathfrak{M}}$ (lub przeto $\bar{\mathcal{H}}$ i $\bar{\mathcal{E}}$) przez wektor $\bar{\mathfrak{L}}$ oraz skalarny potencyał φ.

Spróbujmy teraz przypuścić, że nowy wektor $\bar{\Pi}$ jest rzeczywisty i próbujmy, w tem założeniu, wyrazić $\bar{\mathcal{H}}$ i $\bar{\mathcal{E}}$ przez $\bar{\Pi}$.

Mieliśmy

$$\bar{\mathfrak{M}} = i \cdot \operatorname{curl} \bar{\mathfrak{L}} \qquad \ldots\ldots (I)\ p.6$$

$$c\,\bar{\mathfrak{M}} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{L}}}{\partial t} + c \cdot \nabla \varphi \qquad \ldots\ldots (II)\ p.6$$

następnie:

$$\bar{\mathfrak{L}} = \operatorname{curl} \bar{\Pi} - \frac{i}{c} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \qquad \ldots\ (VI)\ p.9$$

$$\varphi = i \cdot \operatorname{div} \bar{\Pi} \qquad \ldots\ (VII)\ p.9$$

Nareszcie $\bar{\mathfrak{M}} = \bar{\mathcal{H}} + i\bar{\mathcal{E}}$ $\qquad \ldots$ (M) p.1

Łącząc te związki ze sobą, otrzymujemy

$$\bar{\mathcal{H}} + i\bar{\mathcal{E}} = i \cdot \operatorname{curl} \left\{ \operatorname{curl} \bar{\Pi} - \frac{i}{c} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \right\} \qquad \ldots (35)$$

$$\bar{\mathcal{H}} + i\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \operatorname{curl} \bar{\Pi} - \frac{i}{c} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \right\} + \nabla (i \cdot \operatorname{div} \bar{\Pi}) \qquad \ldots (36)$$

Wykonywamy działania po stronach prawych

Otrzymujemy:

$$\bar{H} + i\bar{E} = i \cdot \text{curl}^2 \bar{\Pi} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\text{curl}\,\bar{\Pi}) \quad \ldots (37)$$

$$\bar{H} + i\bar{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\text{curl}\,\bar{\Pi}) - \frac{i}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial t^2} + i\cdot\nabla(\text{div}\,\bar{\Pi}) \quad \ldots (38)$$

lub jeszcze, według znanej tożsamości

$$\bar{H} + i\bar{E} = i\{\nabla(\text{div}\,\bar{\Pi}) - \nabla^2\bar{\Pi}\} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\text{curl}\,\bar{\Pi}) \quad \ldots (39)$$

$$\bar{H} + i\bar{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\text{curl}\,\bar{\Pi}) - \frac{i}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial t^2} + i\nabla(\text{div}\,\bar{\Pi}) \quad \ldots (40)$$

Ponieważ, według (VIII). p. 9., mamy $\frac{\partial^2\bar{\Pi}}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\bar{\Pi}$

przeto widzimy, że prawe strony równań (39) i (40) są identyczne; równania zatem (I) i (II) p. 11, przekształcone przez wprowadzenie do nich wektora $\bar{\Pi}$, dają ten sam wynik.

Ponieważ przypuszczamy obecnie, że $\bar{\Pi}$ jest rzeczywisty, $\bar{H}$ zaś oraz $\bar{E}$ są rzeczywiste, zatem z (39) lub (40):

$$\bar{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\text{curl}\,\bar{\Pi}) \quad \ldots\ldots (41)$$

$$\bar{E} = \nabla(\text{div}\,\bar{\Pi}) - \nabla^2\bar{\Pi} \quad \text{lub}$$

$$\bar{E} = \text{curl}^2\,\bar{\Pi} \quad \ldots\ldots (42)$$

Związki (41) i (42):

$$\bar{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\text{curl}\,\bar{\Pi}) \quad \ldots\ldots (41)$$

$$\bar{E} = \text{curl}^2\,\bar{\Pi} \quad \ldots\ldots (42)$$

stanowią odpowiedź na postawione pytanie.

Można sprawdzić bezpośrednio, że (41) i (42) czynią zadość równaniom zasadniczym (I), (II), (III), (IV) Maxwella (p. 1).

Założenie Rowlanda i H. Hertza

Z Rowlandem i H. Hertzem przypuśćmy, że

$$\Pi_x = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (43a)$$

$$\Pi_y = 0 \qquad \ldots\ldots (43b)$$

$$\Pi_z = \Pi(x, y, z, t) \qquad \ldots\ldots (43c)$$

gdzie oczywiście $\Box^2 \Pi = 0$ .... (44)

Mamy: $\operatorname{div} \overline{\Pi} = \frac{\partial \Pi}{\partial z}$

$$\nabla(\operatorname{div}\overline{\Pi}) = \bar{i}_x \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} + \bar{i}_y \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} + \bar{i}_z \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \overline{\Pi} = \bar{i}_x \cdot \nabla^2 \Pi_x + \bar{i}_y \cdot \nabla^2 \Pi_y + \bar{i}_z \nabla^2 \Pi_z$$

$$= \bar{i}_z \nabla^2 \Pi$$

$$\operatorname{curl} \overline{\Pi} = \bar{i}_x\left(\frac{\partial \Pi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_y}{\partial z}\right) + \bar{i}_y\left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial x}\right) + \bar{i}_z\left(\frac{\partial \Pi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_x}{\partial y}\right)$$

$$= \bar{i}_x \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \bar{i}_y \frac{\partial \Pi}{\partial x}$$

Z równań (41) i (42) wyprowadzamy zatem

$$c.\overline{H} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\bar{i}_x \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \bar{i}_y \frac{\partial \Pi}{\partial x}\right\}$$ zatem

$$cH_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial t} \qquad \ldots\ldots (45a)$$

$$cH_y = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial t} \qquad \ldots\ldots (45b)$$

$$cH_z = 0 \qquad \ldots\ldots (45c)$$

oraz następnie:

$$\bar{\mathcal{E}} = \nabla(\operatorname{div}\bar{\Pi}) - \nabla^2\bar{\Pi}$$

$$= \bar{i}_x \frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial z} + \bar{i}_y \frac{\partial^2\Pi}{\partial y\,\partial z} + \bar{i}_z \cdot \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} - \bar{i}_z \cdot \nabla^2\Pi$$

a zatem:

$$\mathcal{E}_x = \frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial z} \quad \text{-----} (46\,\underline{a})$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{\partial^2\Pi}{\partial y\,\partial z} \quad \text{------} (46\,\underline{b})$$

$$\mathcal{E}_z = -\left\{ \frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2} \right\} \quad \text{---} (46\,\underline{c})$$

Rozwiązania (45) i (46) zostały podane przez H. A. Rowlanda w r. 1884. i przez H. Hertza w r. 1889.

Ogólniejsze rozwiązania (przez $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$ lub dowolny Π) podali Heaviside, Lorentz, Planck i inni uczeni.

{ Dodatkowa uwaga. Można naturalnie iść nieco inną drogą. Można odrazu założyć

$$\Pi_x = 0 \qquad \Pi_y = 0 \qquad \Pi_z = \Pi(x,y,z,t)$$

gdzie $\square^2\Pi = 0$ w równaniach, wyznaczających $\mathcal{L}$ i $\mathcal{P}$, t. j. w (VI) i (VII) p. 9., nie przechodząc przez (41) i (42) p. 12. Otrzymamy odrazu:

$$\mathcal{L}_x = \frac{\partial\Pi}{\partial y} \qquad \mathcal{L}_y = -\frac{\partial\Pi}{\partial x} \qquad \mathcal{L}_z = -\frac{i}{c}\frac{\partial\Pi}{\partial t}$$

$$\text{oraz } \mathcal{P} = i\,\frac{\partial\Pi}{\partial z}$$

Następnie z $\mathcal{M} = i \cdot \operatorname{curl}\bar{\mathcal{L}}$ wyprowadzamy

$$\mathcal{M}_x = \frac{i}{c}\frac{\partial^2\Pi}{\partial y\,\partial t} + i\,\frac{\partial^2\Pi}{\partial z\,\partial x}$$

$$\mathcal{M}_y = -\frac{i}{c}\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial t} + i\,\frac{\partial^2\Pi}{\partial z\,\partial y}$$

$$\mathcal{M}_z = -i\left\{ \frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2} \right\}$$ co zgadza się z (45) i (46) }

Specyalizacya: oscyllator harmoniczny prosty

Załóżmy $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Oscyllator harmoniczny prosty w miejscu (0,0,0)

Badamy falę el-magn-ną, od niego idącą, w (x,y,z) (w próżni)

A stała (amplituda)

$$\left.\begin{aligned} n\tau &= 2\pi \\ c\tau &= \lambda \end{aligned}\right\} n = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad ; \quad ac = 1 \quad ; \quad an = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Zakładamy w (43c) p. 13:

$$\Pi(x,y,z,t) = \frac{A}{r} \sin n(t - ar) \qquad \text{---} (47)'$$

$$= \frac{A}{r} \sin \frac{2\pi c}{\lambda}\left(t - \frac{r}{c}\right) \qquad \text{---} (47)''$$

Otrzymujemy np. dla ξ_x (według 46a)

$$\xi_x = \frac{Axz}{r^3} a^2 n^2 \Big\{ -\sin n(t-ar) + 3\varpi \cdot \cos n(t-ar) + 3\varpi^2 \cdot \sin n(t-ar) \Big\} \qquad (48)$$

gdzie $\varpi = \frac{1}{anr} = \frac{\lambda}{2\pi r}$ --- (49)

Jeżeli znajdujemy się w odległości r bardzo znacznej od oscyllatora (w porównaniu do długości fali λ), mamy

$$\lambda \ll r \quad \text{więc} \quad \varpi \ll 1$$

Wzór (48) daje więc, w przybliżeniu

$$\xi_x = -\frac{Axz}{r^3} a^2 n^2 \cdot \sin n(t - ar) \qquad \text{---} (50)$$

16

atto: $$\xi_x = -\frac{4\pi^2 A\, x z}{\lambda^2 r^3} \sin \frac{2\pi c}{\lambda}\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad \text{--- (50)}$$

Przy pomocy podobnych rachunków, w tem samem przybliżeniu, zawsze przypuszczając $\varpi \ll 1$ i zakładając dla skrócenia

$$S = -\frac{4\pi^2 . A . \sin \frac{2\pi c}{\lambda}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\lambda^2} \quad \text{--- (51)}$$

Znajdujemy

$$(\bar{\xi}) \quad \begin{cases} \xi_x = + \dfrac{xz}{r^3} S \\[2ex] \xi_y = + \dfrac{yz}{r^3} S \\[2ex] \xi_z = - \dfrac{x^2+y^2}{r^3} S \end{cases} \quad \text{--- (52)}$$

$$(\bar{H}) \quad \begin{cases} H_x = - \dfrac{y}{r^2} S \\[2ex] H_y = + \dfrac{x}{r^2} S \\[2ex] H_z = 0 \end{cases} \quad \text{--- (53)}$$

Bliższe poznanie tego el-magn- pola

1.) Mamy: rozumiejąc przez $\bar{r}$ wektor (jednostkowy) o składowych $\frac{x}{r}\, \frac{y}{r}\, \frac{z}{r}$: $r_x = \frac{x}{r}$, itd. są dostawy kierunkowe tego jednostkowego wektora $\bar{r}$, wskazującego kierunek promienia $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$s(\bar{r}\bar{\xi}) = r_x \xi_x + r_y \xi_y + r_z \xi_z \quad [\text{według (52)}:$$

$$= \frac{S}{r^4}\left\{ x^2 z + y^2 z - z(x^2+y^2) \right\}$$

* Byłoby lepiej pisać $\bar{z}$, $z_x = \frac{x}{r}$ itd.

$$= 0$$

zatem $\bar{\xi} \perp \bar{r}$ --- (54)

2) Rozumiejąc wciąż przez r_x, r_y, r_z dostawy kierunkowe $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$

$$S(\bar{r}\bar{\mathcal{H}}) = r_x \mathcal{H}_x + r_y \mathcal{H}_y + r_z \mathcal{H}_z$$ lub według (53)

$$= \frac{S}{r^3}\{-xy + yx\}$$

$$= 0$$

zatem $\bar{\mathcal{H}} \perp \bar{r}$ .... (55)

3.) $$S(\bar{\mathcal{E}}\bar{\mathcal{H}}) = \mathcal{E}_x \mathcal{H}_x + \mathcal{E}_y \mathcal{H}_y + \mathcal{E}_z \mathcal{H}_z$$

$$= \frac{S}{r^5}\{-xyz + xyz\}$$

$$= 0 \qquad \text{--- (56)}$$

zatem $\bar{\mathcal{E}} \perp \bar{\mathcal{H}}$

A zatem fala el-m- jest poprzeczna: $\bar{\mathcal{E}}$ i $\bar{\mathcal{H}}$ są wciąż prostopadłe do $\bar{r}$; zarazem są zawsze prostopadłe wzajemnie ku sobie.

4.) $$\bar{\mathcal{E}}^2 = \mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 + \mathcal{E}_z^2$$

$$= \frac{S^2}{r^6}\{(x^2+y^2)z^2 + (x^2+y^2)^2\}$$

$$= \frac{S^2}{r^6}(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)$$

$$= \frac{S^2}{r^4}(x^2+y^2) \qquad \text{..... (57)}$$

5) $$\bar{\mathcal{H}}^2 = \mathcal{H}_x^2 + \mathcal{H}_y^2 + \mathcal{H}_z^2$$

$$= \frac{S^2}{r^4}(x^2+y^2) \qquad \text{.... (58)}$$

6) Mamy zatem: $\bar{\mathcal{E}}^2 = \bar{\mathcal{H}}^2$ — (59)

18

7.) Równania (56) i (59) orzekają, że

$$\mathfrak{J}_1 = 0 \qquad \mathfrak{J}_2 = 0 \qquad \ldots (60)$$

por. $(\mathfrak{J}_1)(\mathfrak{J}_2)$. p. 2. posiadamy zatem

$$\overline{\mathfrak{M}^2} = 0 \qquad \overline{\mathfrak{M}_*^2} = 0$$

oraz $V^2 = c^2$ (p. 3)

fala el-m- biegnąca od oscylatora jest „czysta" (jednakże tylko w znacznej odległości od oscylatora, gdy $r \gg \lambda$

8.) Wektor Poyntinga $\overline{R}$

$$R_x = \frac{c}{4\pi}(\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y) = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{S^2}{r^5}\, x(x^2+y^2) \quad \ldots (61)a$$

$$R_y = \frac{c}{4\pi}(\mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_x - \mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_z) = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{S^2}{r^5}\, y(x^2+y^2) \quad \ldots (61)b$$

$$R_z = \frac{c}{4\pi}(\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_x) = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{S^2}{r^5}\, z(x^2+y^2) \quad \ldots (61)c$$

a zatem: $\quad R_x : R_y : R_z = x : y : z \qquad \ldots (62)$

Strumień Poyntinga el-m- energii płynie w kierunku $\overline{r}$

Moglibyśmy zresztą odrazu powiedzieć: $\overline{R} = \frac{c}{4\pi} v(\overline{\mathfrak{E}}\overline{\mathfrak{H}})$ zatem $\overline{R} \perp \overline{\mathfrak{E}}$, $\overline{R} \perp \overline{\mathfrak{H}}$; istotnie $\overline{R} \parallel \overline{r}$

9.) Możemy napisać, zamiast równań (61); pamiętając o (57), (58) i (59), co następuje

$$R_x = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{x}{r} \cdot \frac{S^2}{r^4}(x^2+y^2)$$

$$= \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{x}{r} \cdot \overline{\mathfrak{E}^2} \qquad \text{oraz podobnie dalej}$$

$$R_x = \frac{x}{r}\,\frac{1}{4\pi}\,\bar{\mathfrak{E}}^2\cdot c \qquad = \frac{x}{r}\cdot\frac{1}{4\pi}\,\bar{\mathfrak{H}}^2\cdot c$$

$$R_y = \frac{y}{r}\cdot\frac{1}{4\pi}\,\bar{\mathfrak{E}}^2\cdot c \qquad = \frac{y}{r}\cdot\frac{1}{4\pi}\,\bar{\mathfrak{H}}^2\cdot c \qquad (63)$$

$$R_z = \frac{z}{r}\cdot\frac{1}{4\pi}\,\bar{\mathfrak{E}}^2\cdot c \qquad = \frac{z}{r}\cdot\frac{1}{4\pi}\,\bar{\mathfrak{H}}^2\cdot c$$

albo jeszcze

$$R_x = \frac{x}{r}\,\frac{1}{8\pi}\left(\bar{\mathfrak{E}}^2+\bar{\mathfrak{H}}^2\right)\cdot c \quad = \frac{x}{r}\,\rho\cdot c$$

$$R_y = \frac{y}{r}\,\frac{1}{8\pi}\left(\bar{\mathfrak{E}}^2+\bar{\mathfrak{H}}^2\right)\cdot c \quad = \frac{y}{r}\,\rho\cdot c$$

$$R_z = \frac{z}{r}\,\frac{1}{8\pi}\left(\bar{\mathfrak{E}}^2+\bar{\mathfrak{H}}^2\right)\cdot c \quad = \frac{z}{r}\,\rho c$$

gdzie $\rho = \frac{1}{8\pi}\left(\bar{\mathfrak{E}}^2+\bar{\mathfrak{H}}^2\right)$ gęstość el-m- energii (pp. 2–3)

Wartość strumienia R el-m- energii jest więc $= \rho c$ .. (64)

jak było do przewidzenia.

Wszystkie jednak wzory, od (50) poczynając, są przybliżone i stosują się (w przybliżeniu) dla $r \gg \lambda$.

Podamy teraz nieco inną teoryą pola oscylatora, która obywa się bez tego przybliżenia i dlatego może być poprowadzona dalej niż powyższa. –

<u>Nowe założenia</u>. Przypuszczamy, że pewna $\bar{\Pi}(x,y,z,t)$ spełnia równanie

$$\Box^2\bar{\Pi} = 0 \qquad \text{----- (I)}$$

Zakładamy wówczas, że

$$c\bar{\mathfrak{H}} = \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{curl}\bar{\Pi}) \qquad \text{---- (II)}$$

$$\bar{\mathfrak{E}} = \operatorname{curl}^2\bar{\Pi} \qquad \text{..... (III)}$$

<u>Sprawdźmy</u>, czy (I), (II), (III) spełniają 4 fundamentalne równania Maxwellowskie pola el-m-go w próżni.

<u>1.</u> Mamy z (II) i (III)

$$c\cdot\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{H}} = \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{curl}^2\bar{\Pi}) = \frac{\partial\bar{\mathfrak{E}}}{\partial t};$$

pierwszy związek Maxwellowski jest zatem spełniony

<u>2.</u> Mamy $\operatorname{curl}^2\bar{\Pi} = \nabla\operatorname{div}\bar{\Pi} - \nabla^2\bar{\Pi}$

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl}^2\bar{\Pi}) = \operatorname{curl}(\nabla\operatorname{div}\bar{\Pi}) - \operatorname{curl}(\nabla^2\bar{\Pi})$$

ale $\operatorname{curl}\nabla(\;) \equiv 0$; zatem

$$\operatorname{curl}^3\bar{\Pi} = -\operatorname{curl}(\nabla^2\bar{\Pi}) \qquad \text{..... } (*)$$

Otóż z (III): $\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{E}} = \operatorname{curl}^3\bar{\Pi} = -\operatorname{curl}(\nabla^2\bar{\Pi})$ (podług (*)) ... $\odot$

oraz z (II): $\frac{\partial\bar{\mathfrak{H}}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\operatorname{curl}\bar{\Pi})$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{\mathfrak{H}}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\operatorname{curl}\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}\right) \qquad \text{lub, podług (I):}$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\bar{\mathfrak{H}}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\operatorname{curl}(c^2\nabla^2\bar{\Pi}) = \operatorname{curl}(\nabla^2\bar{\Pi}) \quad \text{.....} \odot\odot$$

porównawszy $\odot$ i $\odot\odot$ mamy: $\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{\mathfrak{H}}}{\partial t}$

Co stanowi drugi związek Maxwellowski pola el-m- w próżni

<u>3.</u> Mamy $\operatorname{div}\operatorname{curl}(\;) \equiv 0$

zatem $\operatorname{div}\bar{\mathfrak{E}} = 0$
podobnie $\operatorname{div}\bar{\mathfrak{H}} = 0$ } dodatkowe związki Maxwellowskie w próżni.

Założenie o Π. Przypuśćmy, że wibrator $V(x_0 y_0 z_0)$ ma pewną oś; $\bar{l}$ jest jednostkowy wektor, wskazujący kierunek tej osi; l_x, l_y, l_z są dostawy kierunkowe tego kierunku (stałe w czasie)

Badamy pole w punkcie $M(x, y, z)$; piszemy

(1) $$r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$$

Przypuszczamy, że wektor $\bar{\Pi}$ idzie jak $\bar{l}$:

(2) ... $$\Pi_x : l_x = \Pi_y : l_y = \Pi_z : l_z$$

Zakładamy, że sama wartość skalarna $\bar{\Pi}$ czyli Π zależy tylko od $\underline{r}$ i od $\underline{t}$; t.j. że fala Π (skalara) jest kulista. A zatem

(3) $$\begin{cases} \Pi_x = l_x \Pi(r,t) \\ \Pi_y = l_y \Pi(r,t) \\ \Pi_z = l_z \Pi(r,t) \end{cases}$$

Zakładamy dalej, że $\bar{l}\,(l_x, l_y, l_z)$ nie zależy od $\underline{t}$; zatem, że

(4) ..... $$\frac{\partial^2 \Pi(r,t)}{\partial t^2} = c^2 \cdot \nabla^2 \Pi(r,t)$$

Jednostkowy wektor, idący w kierunku $\bar{r}$, od $\underline{V}$ do $\underline{M}$, będziemy pisali $\bar{z}$; jego składowe z_x, z_y, z_z

(5) .. $$z_x = \frac{x-x_0}{r} \quad ; \quad z_y = \frac{y-y_0}{r} \quad ; \quad z_z = \frac{z-z_0}{r}$$

Obliczamy $div\, \bar{\Pi}$. Mamy z (3)

$$\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} = l_x \frac{\partial \Pi(r,t)}{\partial x} = l_x \frac{\partial \Pi(r,t)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} = z_x l_x \frac{\partial \Pi}{\partial r}$$ i podobnie dalsze;

zatem (6) $$div\, \bar{\Pi} = {}_s(\bar{z}\bar{l}) \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial r} = \sigma \frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

jeżeli (7) $$\sigma = {}_s(\bar{z}\bar{l}).$$

Obliczamy pole elektryczne:

Z równania (42): $\bar{\mathcal{E}} = \mathrm{curl}^2 \bar{\Pi}$ (p. 19)

(8) ----- $= \nabla(\mathrm{div}\, \bar{\Pi}) - \nabla^2 \bar{\Pi}$ por. (23). p. 7

wynika

$$\mathcal{E}_x = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{div}\, \bar{\Pi}) - \nabla^2 \Pi_x$$

$$\mathcal{E}_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma \frac{\partial \Pi}{\partial r}\right) - \nabla^2 (l_x \Pi)$$

(9) ... $$\mathcal{E}_x = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \sigma \mathfrak{r}_x \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} - l_x \nabla^2 \Pi$$

ale $$\nabla^2 \Pi = \frac{2}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} \quad \text{.....(10)}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{r}_x l_x + \mathfrak{r}_y l_y + \mathfrak{r}_z l_z)$$

$$= l_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_0}{r}\right) + l_y \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y-y_0}{r}\right) + l_z \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z-z_0}{r}\right)$$

$$= \frac{l_x}{r} - \frac{1}{r^3}\left\{ l_x (x-x_0)^2 + l_y (y-y_0)(x-x_0) + l_z (z-z_0)(x-x_0) \right\}$$

$$= \frac{l_x}{r} - \frac{x-x_0}{r^3}\left\{ l_x (x-x_0) + l_y (y-y_0) + l_z (z-z_0) \right\}$$

$$= \frac{l_x}{r} - \frac{1}{r}\mathfrak{r}_x \cdot s(\bar{l}\,\bar{\mathfrak{r}})$$

$$= \frac{1}{r}\left\{ l_x - \sigma . \mathfrak{r}_x \right\} \quad \text{.....(11)}$$

Powracając do (9), wobec (10) i (11)

$$\mathcal{E}_x = \frac{1}{r}\left\{ l_x - \sigma . \mathfrak{r}_x \right\} \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \sigma \mathfrak{r}_x \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} - l_x \left\{ \frac{2}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} \right\}$$

$$= - l_x \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r} \right\} + \mathfrak{r}_x \sigma \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r} \right\} \quad (12)$$

Kładąc, dla skrócenia:

$$\mathcal{A} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad \text{------} (13)$$

$$\mathcal{B} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad \text{......} (14)$$

otrzymujemy z (12) pierwsze z pomiędzy 3ch równań

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= - l_x \mathcal{B} + \mathfrak{r}_x \sigma . \mathcal{A} \\ \mathfrak{E}_y &= - l_y \mathcal{B} + \mathfrak{r}_y \sigma . \mathcal{A} \\ \mathfrak{E}_z &= - l_z \mathcal{B} + \mathfrak{r}_z \sigma . \mathcal{A} \end{aligned}\right\} (15)$$

Możemy więc złożyć wektor $\bar{\mathfrak{E}}$ w sposób następujący:

$$\bar{\mathfrak{E}} = - \bar{l} . \mathcal{B} + \bar{\mathfrak{r}} . \sigma \mathcal{A} \quad ... (16)$$

$\bar{\mathfrak{E}}$ jest wypadkową 2-ch wektorów: jednego, długości $-\mathcal{B}$, idącego $\parallel \bar{l}$
drugiego, długości $\sigma\mathcal{A}$, idącego $\parallel \bar{\mathfrak{r}}$

<u>Składowe $\mathfrak{E}_l$ i $\mathfrak{E}_r$</u>. Utwórzmy rzuty $\bar{\mathfrak{E}}$ na kierunki $\bar{l}, \bar{\mathfrak{r}}$:

(a) mamy $\mathfrak{E}_l = s(\bar{\mathfrak{E}}\bar{l})$

$$= - \mathcal{B}\, s(\bar{l}\bar{l}) + \sigma \mathcal{A}\, s(\bar{\mathfrak{r}}\bar{l})$$

$$= - \mathcal{B} + \sigma^2 \mathcal{A} \quad \text{......} (17)$$

(b) mamy $\mathfrak{E}_r = s(\bar{\mathfrak{E}}\bar{\mathfrak{r}})$

$$= - \mathcal{B} . s(\bar{l}\bar{\mathfrak{r}}) + \sigma \mathcal{A}\, s(\bar{\mathfrak{r}}\bar{\mathfrak{r}})$$

$$= \sigma(-\mathcal{B} + \mathcal{A}) \quad \text{---} (18)$$

<u>Wnioski</u>. Z (16) wynika, że $\bar{\mathfrak{E}}$ leży zawsze w płaszczyźnie poprowadzonej przez $\bar{l}$ i przez $\bar{\mathfrak{r}}$ (albo $\bar{r}$). Jednakże wektor

$\bar{\mathfrak{E}}$ nie jest oczywiście $\perp \bar{r}$. Gdyby $\bar{\mathfrak{E}}$ był $\perp \bar{r}$, wówczas $\mathfrak{E}_r$ byłoby $= 0$. Ponieważ wymagałoby to, według (18), ażeby $\sigma(A - B)$ było $= 0$, $\underline{A}$ zaś nie może być $= \underline{B}$ [por. (13) i (14)] więc $\mathfrak{E}_r = 0$ tylko wówczas, gdy $\sigma = 0$

t. j. gdy $s(\bar{r}\bar{l}) = 0$

t. j. $\bar{\mathfrak{E}}$ jest $\perp \bar{r}$ tylko dla tych $\underline{M}(xyz)$ do których idący $\bar{r}$ jest $\perp$ osi $\bar{l}$; innemi słowy, skoro $\bar{l}$ jest osią, tylko w płaszczyźnie równika.

I. Tam, w płaszczyźnie równika (względem osi $\bar{l}$), mamy $\sigma = 0$; tam zatem, według (16):

$$\bar{\mathfrak{E}} = -\bar{l} \cdot B$$

zatem $\bar{\mathfrak{E}} \parallel \mp \bar{l}$, zależnie od tego, czy $B > 0$ czy $B < 0$. Wartość $\mathfrak{E}$ w tej płaszczyźnie jest $|B|$.

II. W punktach leżących w osi (resp. w przedłużeniu $\pm \bar{l}$) mamy $s(\bar{r}\bar{l}) = \pm 1$ a zatem $\sigma^2 = 1$. Jeżeli $r_x = l_x$ itd. wówczas $\sigma = +1$ i mamy $\mathfrak{E}_x = -l_x B + l_x A$

$$= l_x(A - B) \quad \text{itd.}$$

Jeżeli $r_x = -l_x$ itd., mamy $\sigma = -1$ zatem

$$\mathfrak{E}_x = -l_x B - r_x A$$
$$= -l_x B + l_x A$$
$$= + l_x(A - B) \quad \text{itd.}$$

Wartość $\mathfrak{E}$ wynosi zawsze $|A - B|$; kierunek $\mathfrak{E}$ w tych miejscach jest taki jak $\pm \bar{l}$ (zależnie od znaku $A - B$).

Pole magnetyczne. Obliczmy H_x według (41) p. 19 oraz (3) p. 20

Mamy $c H_x = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \Pi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_y}{\partial z} \right\}$

$$c\mathcal{H}_x = \frac{\partial}{\partial t}\left\{ \frac{\partial \Pi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_y}{\partial z} \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left\{ l_z r_y \frac{\partial \Pi}{\partial r} - l_y r_z \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right\}$$

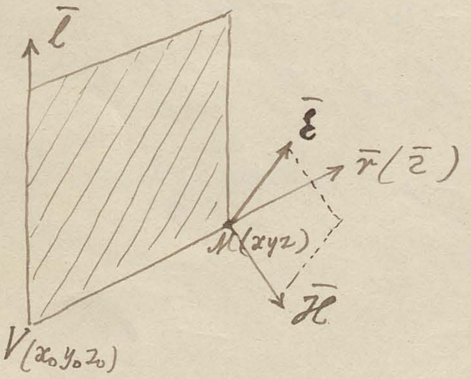
$$= (r_y l_z - r_z l_y) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t\, \partial r} \quad \text{- - - (19a)}$$

Mamy zatem: $$c\bar{\mathcal{H}} = v(\bar{r}\bar{l}) \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t\, \partial r} \quad \text{- - - (20)}$$

albo, pisząc: $$C = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r\, \partial t} \quad \text{- - - - (21),}$$

mamy $$\bar{\mathcal{H}} = v(\bar{r}\bar{l}) \cdot C \quad \text{- - - - - (22)}$$

<u>Wnioski</u>: z równania (22) widzimy, że wektor $\bar{\mathcal{H}}$ jest zawsze prostopadły do płaszczyzny poprowadzonej przez $\bar{r}$ i przez $\bar{l}$; a zatem zawsze $\perp$ do $\bar{\mathcal{E}}$, który leży w tej właśnie płaszczyźnie (zob. p. 22 u dołu).



$\bar{\mathcal{E}}$ w pł. $(\bar{r}\bar{l})$ - - - (23)

$\bar{\mathcal{H}} \perp$ pł. $(\bar{r}\bar{l})$ - - - - (24)

$\bar{\mathcal{H}} \perp \bar{\mathcal{E}}$ - - - - (25)

ale $\bar{\mathcal{E}}$ (wogóle) <u>nie</u> $\perp \bar{r}$, <u>nie</u> $\perp \bar{l}$ } (26)

$\bar{\mathcal{H}}$ zatem jest poprzeczny ($\perp \bar{r}$)

$\bar{\mathcal{E}}$ nie jest naogół poprzeczny

W płaszczyźnie równikowej $v(\bar{r}\bar{l}) = 1$ jest największy, zatem $\bar{\mathcal{H}}$ w tej płaszczyźnie, dla danego r, (na kuli) jest największy, skoro C nie zależy od kąta $(\bar{r}\bar{l})$

W punktach leżących na osi $\bar{l}$ (w jej przedłużeniu) mamy kąt $(\bar{r}\bar{l}) = 0$, więc $v(\bar{r}\bar{l}) = 0$ więc $\bar{\mathcal{H}} = 0$

Czy fala $(\bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{H}})$ biegnąca od wibratora, jest czysta?

Według (25), mamy $_s(\bar{\mathcal{E}}\bar{\mathcal{H}}) = 0$

zatem $J_2 = 0$

Ale J_1 naogół nie jest $= 0$. Z równań (15) p. 22 i (22) p. 24:

$$\bar{\mathcal{E}}^2 = \mathcal{B}^2 + \sigma^2 \mathcal{A}^2 - 2\sigma\mathcal{A}\mathcal{B}(r_x l_x + r_y l_y + r_z l_z)$$

$$\bar{\mathcal{E}}^2 = \mathcal{B}^2 + \sigma^2 \mathcal{A}^2 - 2\sigma^2 \mathcal{A}\mathcal{B} \qquad \text{----(27)}$$

$$\bar{\mathcal{H}}^2 = (v(\bar{r}\bar{l}))^2\, C^2 \qquad ;\ \text{lecz}\ v(\bar{r}\bar{l}) = \sqrt{1-\sigma^2}$$

$$\bar{\mathcal{H}}^2 = (1-\sigma^2)\, C^2 \qquad \text{-----(28)}$$

widzimy, że $\bar{\mathcal{E}}^2$ i $\bar{\mathcal{H}}^2$ nie są naogół równe sobie i J_1 nie jest $= 0$

Fala naogół nie jest czysta.

Szczególna postać wzorów. Przypuśćmy, że oś x wybraliśmy w kierunku osi $\bar{l}$ wibratora. Mamy wówczas

$$\sigma = {}_s(\bar{r}\bar{l}) = r_x$$

$$l_x = 1 \qquad l_y = 0 \qquad l_z = 0$$

zatem z (15) p. 22:

$$\mathcal{E}_x = -\mathcal{B} + r_x^2 \mathcal{A}$$

$$\mathcal{E}_y = r_y r_x \mathcal{A}$$

$$\mathcal{E}_z = r_z r_x \mathcal{A}$$

dalej z (19) (20) p. 24

$$\mathcal{H}_x = 0$$

$$\mathcal{H}_y = r_z C$$

$$\mathcal{H}_z = -r_y C$$

Sprawdzić, w tym przypadku szczególnym, że $s(\overline{\mathcal{E}}\overline{\mathcal{H}}) = 0$

Podobnie można rozważyć dalsze przypadki szczególne, gdy

$$\bar{l} \parallel Oy \quad \text{lub} \quad \bar{l} \parallel Oz$$

Twierdzenie Poyntinga. Uważajmy iloczyn wektorowy

$$v(\overline{\mathcal{E}}\overline{\mathcal{H}}) = v\{(-\bar{l}\cdot\mathcal{B} + \bar{r}\cdot\sigma\mathcal{A})(v(\bar{r}\bar{l})).C$$

$$= -\mathcal{B}C\cdot v(\bar{l}\cdot v(\bar{r}\bar{l})) + \sigma\mathcal{A}C\cdot v(\bar{r}\cdot v(\bar{r}\bar{l}))$$

albo, podług przypisku wektorowego na str. 27:

$$v(\overline{\mathcal{E}}\overline{\mathcal{H}}) = -\mathcal{B}C\cdot(\bar{r} - \sigma\bar{l}) + \sigma\mathcal{A}C\cdot(\sigma\bar{r} - \bar{l}) \qquad \ldots (29)$$

Wyobraźmy sobie powierzchnię kulistą S, której środkiem jest $V(x_0 y_0 z_0)$, promień zaś wynosi r. Jak poprzednio, $\bar{r}$ jest $\perp dS$ nazewnątrz. Ilość energii el-m-, przepływającej przez całą S w 1-ce czasu, wynosi według twierdzenia Poyntinga

$$-\frac{c}{4\pi}\iint_S dS\cdot s(\bar{r}\cdot v(\overline{\mathcal{E}}\overline{\mathcal{H}})) \qquad \ldots (30)$$

lub według (29)

$$+\frac{c}{4\pi}\mathcal{B}C\iint dS\, s(\bar{r}\cdot(\bar{r} - \sigma\bar{l})) - \frac{c}{4\pi}\sigma\mathcal{A}C\iint dS\cdot s(\bar{r}\cdot(\sigma\bar{r} - \bar{l})) \qquad \ldots (31)$$

Ale $s(\bar{r}\cdot(\sigma\bar{r} - \bar{l})) = \sigma\bar{r}^2 - s(\bar{r}\bar{l})$

$= \sigma - \sigma$

$= 0$ zatem całka druga $= 0$

{ Przypisek wektoryalny. I. Obliczyć $v(\bar{l}\, v(\bar{r}\bar{l}))$

x-owa składowa tego iloczynu $= l_y(r_x l_y - r_y l_x) - l_z(r_z l_x - r_x l_z)$

$= r_x(l_y^2 + l_z^2) - l_x(r_y l_y + r_z l_z)$

$= r_x(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2) - l_x(r_x l_x + r_y l_y + r_z l_z)$

$= r_x - \sigma l_x$

a zatem

$$v(\bar{l}\, v(\bar{r}\bar{l})) = \bar{r} - \sigma \bar{l}$$

II. Obliczyć $v(\bar{r}\, v(\bar{r}\bar{l}))$

x-owa składowa tego iloczynu $= r_y(r_x l_y - r_y l_x) - r_z(r_z l_x - r_x l_z)$

$= r_x(r_y l_y + r_z l_z) - l_x(r_y^2 + r_z^2)$

$= r_x(r_x l_x + r_y l_y + r_z l_z) - l_x(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)$

$= \sigma . r_x - l_x$

a zatem

$$v(\bar{r}\, v(\bar{r}\bar{l})) = \sigma . \bar{r} - \bar{l}$$ }

W całce pierwszej

$s(\bar{r} \cdot (\bar{r} - \sigma \bar{l})) = 1 - \sigma^2$

$= 1 - \cos^2\theta$ jeżeli $\mathrm{kąt}(\bar{r}\bar{l}) = \theta$

$= \sin^2\theta$

Zatem $(31) = + \frac{c}{4\pi} \mathcal{B}C \iint_S dS . \sin^2\theta$

Ale $dS = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\chi$ we spółrzędnych kulistych; zatem:

$$(31) = + \frac{c}{2\pi} \mathcal{B}C . r^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^3\theta . d\theta \int_0^{2\pi} d\chi = + \frac{2}{3} c . r^2 \mathcal{B}C \qquad (32)$$

Specyalizacya założeń. Podobnie jak dawniej, możemy przypuścić, za Rowlandem i Hertzem, że

$$\Pi(r,t) = -\frac{iA}{r}\,\varepsilon^{in(t-ar)} \qquad \ldots.(33)$$

gdzie A stała amplituda, $ac=1$.

{ Uwaga wtrącona. Zaobaczyliśmy, p. 19, że Π skalarna czyni zadość równaniu

$$* \qquad \frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = c^2 . \nabla^2\Pi$$

Ale, ponieważ $\Pi = \Pi(r,t)$ przeto $\nabla^2\Pi = \frac{2}{r}\frac{\partial\Pi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial r^2}$

Otóż $\frac{\partial}{\partial r}(r\Pi) = \Pi + r\frac{\partial\Pi}{\partial r}$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Pi) = 2\frac{\partial\Pi}{\partial r} + r\frac{\partial^2\Pi}{\partial r^2} = r.\nabla^2\Pi$$

zatem równanie * powyższe daje

$$r\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = c^2 . \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Pi)$$

lub

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\Pi) = c^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Pi) \qquad \ldots.(34)$$

Zatem $(r\Pi)$ czyni zadość równaniu "strun drgających"

Według wiadomego twierdzenia, $r\Pi$ jest zatem funkcyą: bądź argumentu $(r-ct)$, bądź argumentu $(r+ct)$.

Ponieważ $ac=1$, przeto założenie (33) czyni zadość temu wymaganiu. }

Bierzemy na uwagę najprzód tę część pola, która leży nadzwyczaj blisko wibratora $V(x_0 y_0 z_0)$. W tej dziedzinie r jest z założenia nadzwyczaj mała; przypuśćmy, że jest tak mała, że

możemy zaniedbać $\underline{ar}$ wobec $\underline{t}$ w wyrazie $\varepsilon^{in(t-ar)}$. Prawa strona równania (33) p. 28 jest wówczas proporcjonalna do $\left(\frac{1}{r}\right)$ tylko. Wiemy jednak, że $\left(\frac{1}{r}\right)$ spełnia równanie Laplace'a

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \quad \text{- - -} (35)$$

zatem w tej dziedzinie pola możemy przyjąć $\nabla^2 \Pi = 0$

z (8) p. 21. otrzymujemy zatem, w tej dziedzinie pola

$$\overline{\mathcal{E}} = \nabla(\operatorname{div} \overline{\Pi}) \quad \text{- - - - -} (36)$$

Obliczamy div Π z (33) p. 28, według wzoru (6) p. 20:

$$\operatorname{div} \overline{\Pi} = \sigma \frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad \cdots\cdots (37)$$

Mamy (33): $\quad \Pi = -\frac{iA}{r}\varepsilon^{in(t-ar)}$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = +\frac{iA}{r^2}\varepsilon^{in(t-ar)} + ian\frac{iA}{r}\varepsilon^{in(t-ar)}$$

$$= \frac{iA}{r^2}\varepsilon^{in(t-ar)}\{1 + ianr\}$$

lub w dziedzinie pola nadzwyczaj bliskiej $V(x_0 y_0 z_0)$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = \frac{iA}{r^2}\varepsilon^{in(t-\cancel{ar})} \quad \text{- - - - - -} (38)$$

{ ar według założenia opuszczamy

Zatem (37):

$$\operatorname{div} \overline{\Pi} = s(\overline{\tau}\,\overline{l}) \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

lub, według (38):

$$= s(\overline{\tau}\,\overline{l}) \cdot \frac{iA}{r^2}\varepsilon^{in(t-ar)}$$

$$= iA\,\varepsilon^{in(t-\cancel{ar})}\, s\left(\frac{\overline{\tau}}{r^2} \cdot \overline{l}\right) \quad \text{- - - - -} (39)$$

Ale $\overline{\nabla\left(\frac{1}{r}\right)} = -\frac{1}{r^2}\left\{\overline{i}_x\left(\frac{x-x_0}{r}\right) + \overline{i}_y\left(\frac{y-y_0}{r}\right) + \overline{i}_z\left(\frac{z-z_0}{r}\right)\right\}$

$$= -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\overline{r}}{r} = -\frac{\overline{\tau}}{r^2} \quad (40) \text{ gdyż } \overline{r} = \overline{\tau}\cdot r$$

Uwzględniając (40): $\frac{\bar{r}}{r^2} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$

w równaniu (39), mamy

$$\operatorname{div} \Pi = -iA\,\varepsilon^{in(t-\cancel{\alpha r})}\, {}_s\left(\bar{l}.\,\overline{\nabla\left(\tfrac{1}{r}\right)}\right) \quad \ldots (41)$$

Oznaczmy

$$\bar{\mathcal{L}} = -iA.\,\varepsilon^{in(t-\cancel{\alpha r})}\,\bar{l} \quad \ldots\ldots (42)$$

Równanie (41) przepisujemy wówczas

$$\operatorname{div} \Pi = {}_s\left(\bar{\mathcal{L}}.\,\overline{\nabla\left(\tfrac{1}{r}\right)}\right) \quad \ldots\ldots (43)$$

Powracając do (36) p. 29, mamy

$$\bar{\mathcal{E}} = \nabla\,{}_s\left(\bar{\mathcal{L}}.\,\overline{\nabla\left(\tfrac{1}{r}\right)}\right) \quad \ldots\ldots (44)$$

a zatem $-{}_s\left(\bar{\mathcal{L}}.\,\overline{\nabla\left(\tfrac{1}{r}\right)}\right)$ wyraża potencyał, istniejący w bezpośredniem pobliżu wibratora. Stąd, według znanego twierdzenia o polu elektrycznem "dwuźródła" albo "podwójnego" elektrycznego układu 2-ch punktów (pary), wnosimy, że $\bar{\mathcal{L}}$ jest momentem tej pary czyli tego wibratora $V(x_0 y_0 z_0)$. Ponieważ $\bar{\mathcal{L}}$ idzie jak $\pm \bar{l}$ [według (42)], rozumiemy zatem, dlaczego $\bar{l}$ nazywaliśmy w całym tym wywodzie osią; jest to poprostu oś dwuźródła, równoważnego wibratorowi V. A ponieważ, według (42), moment $\bar{\mathcal{L}}$ jest periodycznie zmienny, z szybkością n, z czasem t:

$$\bar{\mathcal{L}} = -iA\,\varepsilon^{int}\,\bar{l} \quad \ldots\ldots (45)$$

zatem dwuźródło, o periodycznie (ε^{int}) (z czasem) zmiennym momentem jest równoważne drganiu harmonicznemu prostemu ujemnego el-go ładunku (punktowego) względem dodatniego.

Dokończenie rachunku. Na zasadzie założenia (33) p. 28, przy pomocy określeń (13), (14) p. 22 oraz (21) p. 24, otrzymujemy wyrażenia dla wartości $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, od których zależą $\bar{\mathcal{E}}$ i $\bar{\mathcal{H}}$ jak wiadomo (pp. 22 i 24).

Rozumiejąc przez ϖ stosunek (liczbę czystą) { $cT = \lambda = \frac{2\pi c}{n}$ gdzie λ długość fali }

$$\varpi = \frac{1}{anr} = \frac{c}{nr} = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad \text{--- (45)}$$

znajdujemy

$$\mathcal{A} = \frac{n^2 A \, \varepsilon^{in(t-ar)}}{c^2 r} \left\{ i + 3\varpi - 3i\varpi^2 \right\} \quad (46)$$

$$\mathcal{B} = \frac{n^2 A \, \varepsilon^{in(t-ar)}}{c^2 r} \left\{ i + \varpi - i\varpi^2 \right\} \quad (47)$$

$$\mathcal{C} = -\frac{n^2 A \, \varepsilon^{in(t-ar)}}{c^2 r} \left\{ i + \varpi \right\} \quad (48)$$

Jeżeli rozważamy dziedziny bardzo odległe od wibratora, tak że $r \gg \lambda$, możemy zaniedbać ϖ i wówczas

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} = -\mathcal{C} \quad \text{--- (49)}$$

Wówczas, według (18). p. 22: $\mathcal{E}_r = 0$ więc $\bar{\mathcal{E}}$ jest $\perp \bar{r}$ (por. pp. 23–24)

w ogromnej odległości $\bar{\mathcal{E}}$ jest poprzeczny

Według (27) p. 25 mamy wówczas

$$\bar{\mathcal{E}}^2 = \mathcal{A}^2 + \sigma^2\mathcal{A}^2 - 2\sigma^2\mathcal{A}^2 = (1-\sigma^2)\mathcal{A}^2$$

mamy zatem wówczas [por. (28). p. 25]

$$\bar{\mathcal{E}}^2 = \bar{\mathcal{H}}^2 \quad \text{--- (50)}$$

i wówczas (w tem przybliżeniu) fala jest czysta.

Przepływ energii od wibratora, nazewnątrz. Powracając do (32) pp. 26–27, według twierdzenia Poyntinga, otrzymujemy na ów przepływ w 1^{ce} czasu, przez całą powierzchnię kulistą $\underline{S}$:

$$\frac{2}{3} c \cdot r^2 \cdot \mathcal{B} C$$

lub dla $r \gg \lambda$, skoro $C = -\mathcal{B}$ (p. 31) (równ. (49))

$$= -\frac{2}{3} c r^2 \cdot \mathcal{B}^2$$

lub, według (47) p. 31

$$= +\frac{2}{3} c r^2 \cdot \frac{n^4 A^2}{c^4 r^2} \, \varepsilon^{2in(t-ar)}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{n^4 A^2}{c^3} \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2n\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

{można by pisać $\cos^2(\ )$, $\sin^2(\ )$ w wyr. dla energii

Jest rzeczą bardzo ważną w Optyce molekularnej, że ten przepływ jest wprost proporcyonalny do n^4. Że jest niezależny (abstrahując od $\left(\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right)$) od $\underline{r}^2$, rozumiało się samo przez się a priori; wszystka energia płynąca przez jedną S, musi przepłynąć przez inną S, jeżeli abstrahujemy od falowań periodycznych pod znakiem $\left\{\begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix}\right\}$.

66/04